מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: קיץ תשע"ד, **מועד ב**
מספר השאלון: **035803, 313**
תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

3 יחידות לימוד — שאלון שלישי

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שש שאלות בנושאים:
אלגברה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.
עליך לענות על ארבע שאלות —
$4 \times 25 = 100$ נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

دولة إسرائيل
وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثّانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين
موعد الامتحان صيف 2014، **الموعد "ب"**
رقم النّموذج: **035803، 313**
ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

3 وحدات تعليميّة – النّموذج الثّالث

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ساعتان.

ب. مبنى النّموذج وتوزيع الدرجات:
في هذا النّموذج ستّة أسئلة في الموضوعين:
الجبر، حساب التفاضل والتكامل.
عليك الإجابة عن أربعة أسئلة —
$4 \times 25 = 100$ درجة

جـ. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:
1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:
1. لا تنسخ السّؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدّفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتّفصيل وبوضوح وبترتيب.
عدم التّفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التّعليمات في هذا النّموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النّجاح!

السؤال 1

عرض أحد المطاعم لائحتَي طعام لوجبتين جماعيّتين.
لائحة طعام نباتيّة بسعر 34 شيقل للشخص.
لائحة طعام من اللحوم بسعر 68 شيقل للشخص.
وصلت إلى المطعم مجموعتان: المجموعة "أ" والمجموعة "ب".
المجموعة "أ" اختارت اللائحة النباتيّة، والمجموعة "ب" اختارت لائحة من اللحوم.
عدد الأشخاص في المجموعة "ب" كان أصغر بـ 10 من عدد الأشخاص في المجموعة "أ".
السعر الكلّيّ الذي دفعته المجموعة "ب" كان 75% من السعر الكلّيّ الذي دفعته المجموعة "أ".

أ. جد كم شخصًا كان في كلّ مجموعة.

ب. جد السعر الكلّيّ الذي كانت ستدفعه المجموعة "ب" لو كان عدد الأشخاص فيها مساويًا لعدد الأشخاص في المجموعة "أ".

إجابة السؤال 1

أ. نرمز: x – عدد الأشخاص في المجموعة "أ".

لذلك عدد الأشخاص في المجموعة "ب" هو: $x - 10$

السعر الكلّيّ الذي دفعته المجموعة "أ" هو: $34x$

السعر الكلّيّ الذي دفعته المجموعة "ب" هو: $68(x - 10)$

السعر الكلّيّ الذي دفعته المجموعة "ب"
هو 75% من السعر الكلّيّ الذي دفعته المجموعة "أ"،
لذلك يتحقّق: $68(x - 10) = 0.75 \cdot 34x$

$$\Downarrow$$

$$68x - 680 = 25.5x$$

$$\Downarrow$$

$$x = 16$$

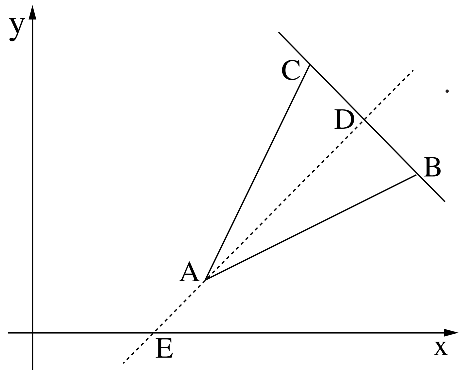
عدد الأشخاص في المجموعة "أ" هو: 16 شخصًا

عدد الأشخاص في المجموعة "ب" هو: 6 أشخاص

ب. السعر الكلّيّ الذي كانت ستدفعه المجموعة "ب"
لو كان عدد الأشخاص فيها 16 هو: $16 \cdot 68 =$ 1088 شيقل

/يتبع في صفحة 3/

السؤال 2



النقطتان $A(4\,,1)$ وَ $B(8\,,3)$ هما رأسان في المثلّث المتساوي الساقين ABC $(AB = AC)$.

الضلع BC موضوع على المستقيم $y = -\,x + 11$.

أنزلوا من النقطة A ارتفاعًا على الضلع BC .

الارتفاع يقطع BC في النقطة D

والمحور x في النقطة E (انظر الرسم) .

أ. (1) جد ميل المستقيم AD .

(2) جد معادلة المستقيم AD .

ب. جد إحداثيّات النقاط E وَ D وَ C .

جـ. فسّر لماذا المثلّث CEB هو متساوي الساقين .

إجابة السؤال 2

أ. (1) المستقيم AD يعامد الضلع BC ،

الضلع BC موضوع على المستقيم الذي معادلته $y = -\,x + 11$ ،

لذلك $m_{BC} = -1$.

حاصل ضرب ميلَي المستقيمين المتعامدين هو -1 ،

لذلك يتحقّق: $m_{AD} \cdot m_{BC} = (-1)$

$\Downarrow$

ميل المستقيم AD هو: $m_{AD} = 1$

(2) المستقيم AD يمرّ عبر النقطة $A(4\,,1)$

وميله 1 ، لذلك معادلته: $y - 1 = 1 \cdot (x - 4)$

$\Downarrow$

معادلة المستقيم AD هي: $y = x - 3$

ب. تقاطُع المستقيم $y = x - 3$ مع المحور x

هو في النقطة التي فيها $y = 0$، لذلك: $0 = x - 3$

$\Downarrow$

$x = 3$

إحداثيّات النقطة E هي: $E(3\,,0)$

في النقطة D ، المستقيم الذي معادلته $y = x - 3$

يتقاطع مع المستقيم الذي معادلته $y = -\,x + 11$.

لذلك يتحقّق: $x - 3 = -\,x + 11$

$\Downarrow$

$2x + 14$

$\Downarrow$

$x = 7$

$\Downarrow$

$y = 4$

إحداثيّات النقطة D هي: $D(7\,,4)$

/ يتبع في صفحة 4 /

تكملة إجابة السؤال 2.

في المثلّث المتساوي الساقين ABC الذي فيه AB = AC
الارتفاع AD هو أيضًا مستقيم متوسّط للضلع BC ،
لذلك النقطة C هي منتصف الضلع BC ويتحقّق:

$$\frac{x_C + x_B}{2} = x_D \quad , \quad \frac{y_C + y_B}{2} = y_D$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$\frac{x_C + 8}{2} = 7 \quad , \quad \frac{y_C + 3}{2} = 4$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$x_C = 6 \quad , \quad y_C = 5$$
$$\Downarrow$$

إحداثيّات النقطة C هي: $C(6 , 5)$

جـ. <u>الطريقة I</u>:
المثلّث CEB هو متساوي الساقين إذا تحقّق EB = EC .

نجد طولَي القطعتين EB وَ EC : $E(3,0)\ ,\ B(8,3)\ ,\ C(6,5)$

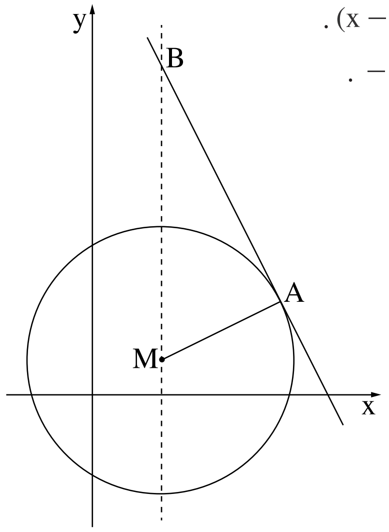
$$EB^2 = (3-8)^2 + (0-3)^2 = 34$$
$$EC^2 = (3-6)^2 + (0-5)^2 = 34$$
$$\Downarrow$$
$$EB^2 = EC^2$$
$$\Downarrow$$
$$EB = EC = \sqrt{34}$$

إذا كان في المثلّث ضلعان متساويان فإنّ المثلّث متساوي الساقين

<u>الطريقة II</u>:
ED يعامد BC ، أي أنّه ارتفاع في المثلّث CEB .
ED هو أيضًا مستقيم متوسّط للضلع BC في المثلّث CEB.
المثلّث الذي فيه الارتفاع على الضلع هو أيضًا مستقيم متوسّط للضلع هو مثلّث متساوي الساقين.
لذلك المثلّث CEB هو متساوي الساقين.

/يتبع في صفحة 5/

السؤال 3



معطاة دائرة مركزها M ومعادلتها $(x-6)^2+(y-3)^2=125$.

في النقطة A التي على محيط الدائرة، مرّروا مماسًّا ميله -2 .

الإحداثيّ x للنقطة A هو 16 (انظر الرسم).

أ. (1) جد الإحداثيّ y للنقطة A .

(2) جد معادلة المماسّ للدائرة في النقطة A .

ب. المستقيم $x=6$ يقطع المماسّ الذي وجدتَه في البند "أ" في النقطة B، كما هو موصوف في الرسم.
جد إحداثيّات النقطة B .

جـ. جد مساحة المثلّث AMB .

إجابة السؤال 3

أ. (1) الطريقة I:

النقطة A تقع على محيط الدائرة.

لذلك إحداثيّات النقطة A تحقّق معادلة الدائرة.

نعوّض الإحداثيّ x للنقطة A في معادلة الدائرة وينتج: $(16-6)^2+(y-3)^2=125$

$\Downarrow$

$(y-3)^2=25$

$\Downarrow$

$y=8 \ , \ y=-2$

النقطة A تقع في الربع الأوّل لذلك الإحداثيّ y هو موجب.

إحداثيّات النقطة A هي: $A(16\,,8)$

الطريقة II:

المماسّ للدائرة يعامد نصف القطر في نقطة التماسّ.

لذلك القطعة AM تعامد المماسّ للدائرة في النقطة A .

ميل المماسّ هو -2،

لذلك ميل القطعة AM هو $\frac{1}{2}$ ، ويتحقّق: $m_{AM}=\frac{y_A-y_M}{x_A-x_M}=\frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$\frac{y_A-3}{16-6}=\frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$y_A=8$

إحداثيّات النقطة A هي: $A(16\,,8)$

(2) معادلة المماسّ للدائرة في النقطة A هي: $y-8=-2(x-16)$

$\Downarrow$

$y=-2x+40$

/يتبع في صفحة 6/

تكملة إجابة السؤال 3.

ب. النقطة B هي نقطة تقاطُع المستقيم $x = 6$
مع المماسّ $y = -2x + 40$ ، لذلك يتحقّق:

$y = -2 \cdot 6 + 40$

$\Downarrow$

$y = 28$

إحداثيّات النقطة B هي: $B(6, 28)$

جـ. <u>الطريقة I</u>:
المماسّ للدائرة يعامد نصف القطر في نقطة التماسّ. لذلك، $\measuredangle MAB = 90^o$.
مساحة المثلّث AMB تساوي نصف حاصل ضرب الضلعين القائمين،
ويتحقّق:

$S_{\triangle AMB} = \frac{AM \cdot AB}{2}$

$AM = R = \sqrt{125}$

$AB = \sqrt{(16-6)^2 + (28-8)^2} = \sqrt{500}$

$\Downarrow$

مساحة المثلّث AMB هي: $S_{\triangle AMB} = \frac{\sqrt{125} \cdot \sqrt{500}}{2} = 125$

<u>الطريقة II</u>:
مساحة المثلّث AMB تساوي نصف حاصل ضرب الضلع MB
في الارتفاع AD النازل عليه (انظر الرسم).
لذلك يتحقّق:

$S_{\triangle AMB} = \frac{MB \cdot AD}{2}$

$AD = x_A - x_D$

$x_D = 6$

$\Downarrow$

$AD = 16 - 6 = 10$

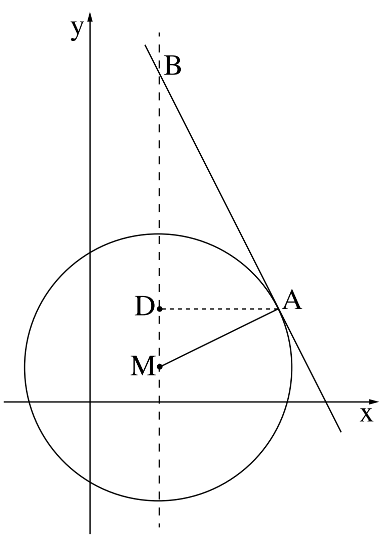
$MB = y_B - y_M$

$\Downarrow$

$MB = 28 - 3 = 25$

$\Downarrow$

$S_{\triangle AMB} = \frac{25 \cdot 10}{2} = 125$



/يتبع في صفحة 7/

السؤال 4

معطاة الدالّة $f(x) = 2x - 8\sqrt{x}$.

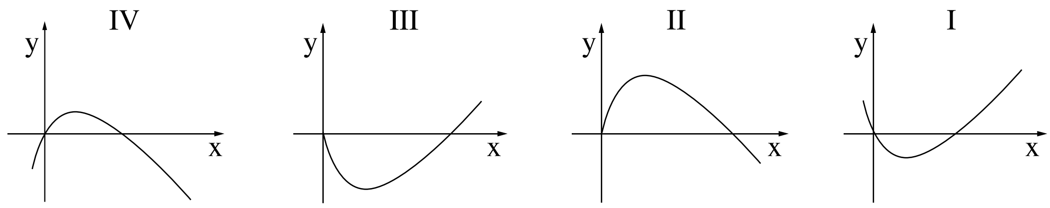
أ . ما هو مجال تعريف الدالّة؟

ب . جد النقطة القصوى الداخليّة للدالّة، وحدِّد نوع هذه النقطة. علّل.

جـ. جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة. علّل إجابتك.

د. جد نقطة تقاطُع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحور y .

هـ. حدِّد أيّ رسم بيانيّ من الرسوم البيانيّة I-IV التي أمامك هو الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$.



إجابة السؤال 4

أ. مجال التعريف هو: $x \geq 0$ التعبير داخل الجذر التربيعيّ يجب أن لا يكون سالبًا

ب. مشتقّة الدالّة $f(x)$ هي: $f'(x) = 2 - \frac{8}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$2 - \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$2 = \frac{4}{\sqrt{x}}$$
$$\Downarrow$$

الإحداثيّ x الذي بالنسبة له $f'(x) = 0$ هو: $x = 4$

فحص إشارة المشتقّة $f'(x)$:

المجالات	$0 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
x	$x = 1$	$x = 4$	$x = 9$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	نقطة نهاية صغرى	$\nearrow$

إحداثيّات النقطة القصوى الداخليّة هي: $(4 , -8)$ نقطة نهاية صغرى

/ يتبع في صفحة 8 /

تكملة إجابة السؤال 4.

جـ. نحدّد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $f(x)$

حسب إشارة المشتقّة $f'(x)$: $f'(x) > 0$ في المجال $x > 4$

$f'(x) < 0$ في المجال $0 < x < 4$

$\Downarrow$

الدالّة $f(x)$ تصاعديّة في المجال: $x > 4$

الدالّة $f(x)$ تنازليّة في المجال: $0 < x < 4$

جـ. في نقطة تقاطُع الدالّة $f(x)$ مع المحور y

الإحداثيّ x هو $x = 0$ ، لذلك يتحقّق: $f(0) = 2 \cdot 0 - 8\sqrt{0}$

$\Downarrow$

$f(0) = 0$

$\Downarrow$

نقطة تقاطُع الدالّة $f(x)$ مع المحور y هي: $(0 , 0)$

هـ. الرسم البيانيّ III هو الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ ، لأنّه يتحقّق:

1) مجال التعريف $x \geq 0$.

2) النقطة القصوى الداخليّة $(4 , -8)$ التي هي نقطة نهاية صغرى.

3) الدالّة تصاعديّة في المجال $x > 4$ ، وتنازليّة في المجال $0 < x < 4$.

4) نقطة التقاطع مع المحور y $(0 , 0)$.

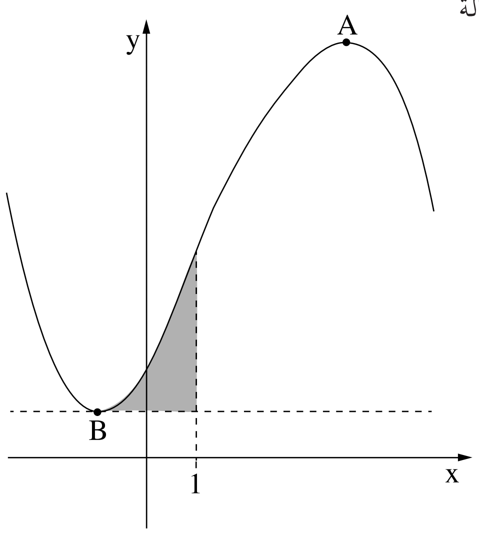
في الرسم البيانيّ I الدالّة معرَّفة لكلّ x ، لذلك الرسم البيانيّ غير ملائم.

في الرسم البيانيّ II توجد للدالّة نقطة قصوى التي هي نقطة نهاية عظمى، لذلك الرسم البيانيّ غير ملائم.

في الرسم البيانيّ IV الدالّة معرَّفة لكلّ x وتوجد للدالّة نقطة نهاية عظمى، لذلك الرسم البيانيّ غير ملائم.

/يتبع في صفحة 9/

السؤال 5



يصف الرسم الذي أمامك رسمًا بيانيًا تقريبيًا للدالّة

$f(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 6\frac{2}{3}$.

A وَ B هما النقطتان القصويان للدالّة $f(x)$.

أ. جد إحداثيّات النقطتين A وَ B .

ب. مرّروا في النقطة B مماسًّا للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$.
جد معادلة المماسّ.

جـ. احسب المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ والمستقيم $x = 1$ والمماسّ الذي وجدتَ معادلته في البند "ب" (المساحة الرماديّة في الرسم) .

إجابة السؤال 5

أ. مشتقّة الدالّة $f(x)$ هي: $f'(x) = -x^2 + 4x + 5$

$$f'(x) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$-x^2 + 4x + 5 = 0$$
$$\Downarrow$$

الإحداثيّ x للنقاط التي بالنسبة لها $f'(x) = 0$ هو: $x = -1 \ , x = 5$

إحداثيّات النقطة A هي: $A(5, 40)$ نقطة نهاية عظمى

إحداثيّات النقطة B هي: $B(-1, 4)$ نقطة نهاية صغرى

ب. ميل المماسّ للرسم البيانيّ للدالّة في نقطة النهاية الصغرى هو 0 .

لذلك معادلة المماسّ للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في النقطة B هي: $y = 4$

جـ. <u>الطريقة I</u>:

حساب المساحة الرماديّة: $\int_{-1}^{1} (-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 2\frac{2}{3})dx = \int_{-1}^{1} (f(x) - 4)dx =$ المساحة الرماديّة S

إيجاد الدالّة الأصليّة: $-\frac{x^4}{12} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 2\frac{2}{3}x = \Big|_{-1}^{1}$ = المساحة الرماديّة S

تعويض الحدود: $\left(-\frac{1}{12} + \frac{2}{3} + \frac{5}{2} + 2\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{12} - \frac{2}{3} + \frac{5}{2} - 2\frac{2}{3}\right) = 6\frac{2}{3}$ = المساحة الرماديّة S

المساحة المطلوبة (المساحة الرماديّة) هي: $6\frac{2}{3}$ = المساحة الرماديّة S

/ يتبع في صفحة 10 /

تكملة إجابة السؤال 5.

الطريقة II:

$S_{\text{مستطيل}}$ هي المساحة المحصورة
بين المماسّ في نقطة النهاية الصغرى والمحور x
في الحدّين 1− وَ 1 . لذلك:

$$S_{\text{المساحة الرماديّة}} = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - S_{\text{مستطيل}}$$

$$S_{\text{المساحة الرماديّة}} = \int_{-1}^{1} \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 6\frac{2}{3}\right)dx - 4 \cdot 2$$

$$S_{\text{المساحة الرماديّة}} = -\frac{x^4}{12} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 6\frac{2}{3}x \Big|_{-1}^{1} - 8$$

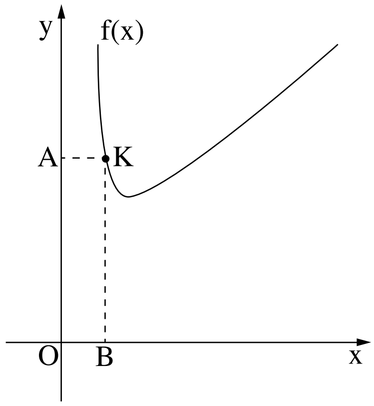
$$S_{\text{المساحة الرماديّة}} = \left(-\frac{1}{12} + \frac{2}{3} + \frac{5}{2} + 6\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{12} - \frac{2}{3} + \frac{5}{2} - 6\frac{2}{3}\right) - 8$$

المساحة المطلوبة (المساحة الرماديّة) هي:

$$S_{\text{المساحة الرماديّة}} = 6\frac{2}{3}$$

/يتبع في صفحة 11/

السؤال 6



يصف الرسم الذي أمامك الرسم البيانيّ للدالّة $f(x) = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 5$ في المجال $x > 0$.

من النقطة K ، التي تقع على الرسم البيانيّ للدالّة، مرّروا عمودين على المحورين بحيث تكوَّنَ المستطيل AKBO (O – نقطة أصل المحاور) .

أ. عبِّر عن طولَي ضلعَي المستطيل AK وَ KB بدلالة الإحداثيّ x للنقطة K .

ب. ماذا يجب أن يكون الإحداثيّ x للنقطة K حتّى يكون محيط المستطيل AKBO أصغر ما يمكن؟

إجابة السؤال 6

أ. إحداثيّات النقطة K هي: $K(x\,,\, x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 5)$

طول القطعة AK يساوي الإحداثيّ x للنقطة K ،
لذلك يتحقّق: $AK = x \quad , \quad x > 0$

طول القطعة KB يساوي الإحداثيّ y للنقطة K ،
لذلك يتحقّق: $KB = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 5 \quad , \quad x > 0$

/ يتبع في صفحة 12 /

تكملة إجابة السؤال 6.

ب. محيط المستطيل AKOB : $\text{محيط}_{AKBO} = 2AK + 2KB$

دالّة محيط المستطيل AKBO هي : $\text{محيط}_{AKBO} = P(x) = 4x + \frac{1}{x} + 10 \quad , \quad x > 0$

المشتقّة هي : $P'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$

$\Downarrow$

$P'(x) = 0$

$4 - \frac{1}{x^2} = 0$

$x^2 = \frac{1}{4}$

$x = \pm\frac{1}{2} \quad , \quad x > 0$

$\Downarrow$

$x = \frac{1}{2}$

فحص نوع النقطة القصوى
حسب التعويض في دالّة المشتقّة :

المجالات	$0 < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
x	$\frac{1}{4}$		1
P'(x)	$-$	0	$+$
P(x)	$\searrow$	نقطة نهاية صغرى	$\nearrow$

$\Downarrow$

$x = \frac{1}{2}$ نقطة نهاية صغرى

الإحداثيّ x، الذي بالنسبة له محيط المستطيل AKBO هو أصغر ما يمكن، هو : $x = \frac{1}{2}$